# *Ri-pensare la matematica*

**Cinzia**

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”
Università di Padova
mail : bonotto@math.unipd.it

**Istituto “Giuseppe Mazzotti”**
**Treviso, 22 ottobre 2017**

# UN PO’ DI STORIA

A partire dagli anni ’90 ci siamo occupati di come impostare un insegnamento/apprendimento della matematica in grado di superare

‘*la frattura, oggi esistente, tra le abilità matematiche attivate nel contesto scolastico e quelle che vengono attivate in contesti extrascolastici*’ (Basso & Bonotto, 1996)

visto che molte ricerche hanno evidenziato una forte discontinuità fra la competenza matematica di tipo scolastico e quella che viene attivata in contesti extrascolastici.

## INDAGINI ALUNNI

Hanno evidenziato **carenze e difficoltà**

- nell' **ordinare** sequenze di numeri razionali ,
- nel rapporto tra rappresentazione frazionaria e rappresentazione decimale dei numeri razionali,

e, più in generale,

- nella relazione tra convenzioni di scrittura e significati.

(Bonotto 1992, 1993 e 1996).

# SULL' ORDINAMENTO

## *Ordina i seguenti numeri dal minore al maggiore:*

***0,15 1 0,1 1,5 0,5 1,05***

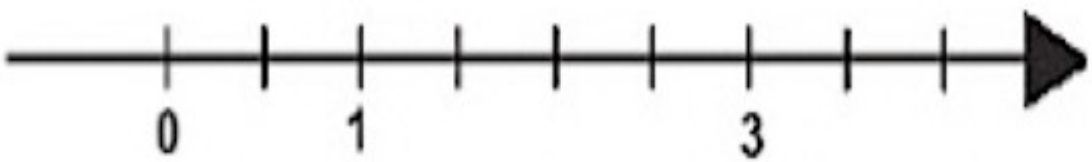
| | V-P | I-SSI$^0$ | 2-SSI$^0$ | 3-SSI$^0$ |
|---|---|---|---|---|
| **Risposte corrette** | **19%** | **26%** | **24%** | **41%** |
| **Risposte sbagliate** | **81%** | **74%** | **76%** | **59%** |

*Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali*… (Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola primaria e al termine della classe quinta, Indicazioni Nazionali )

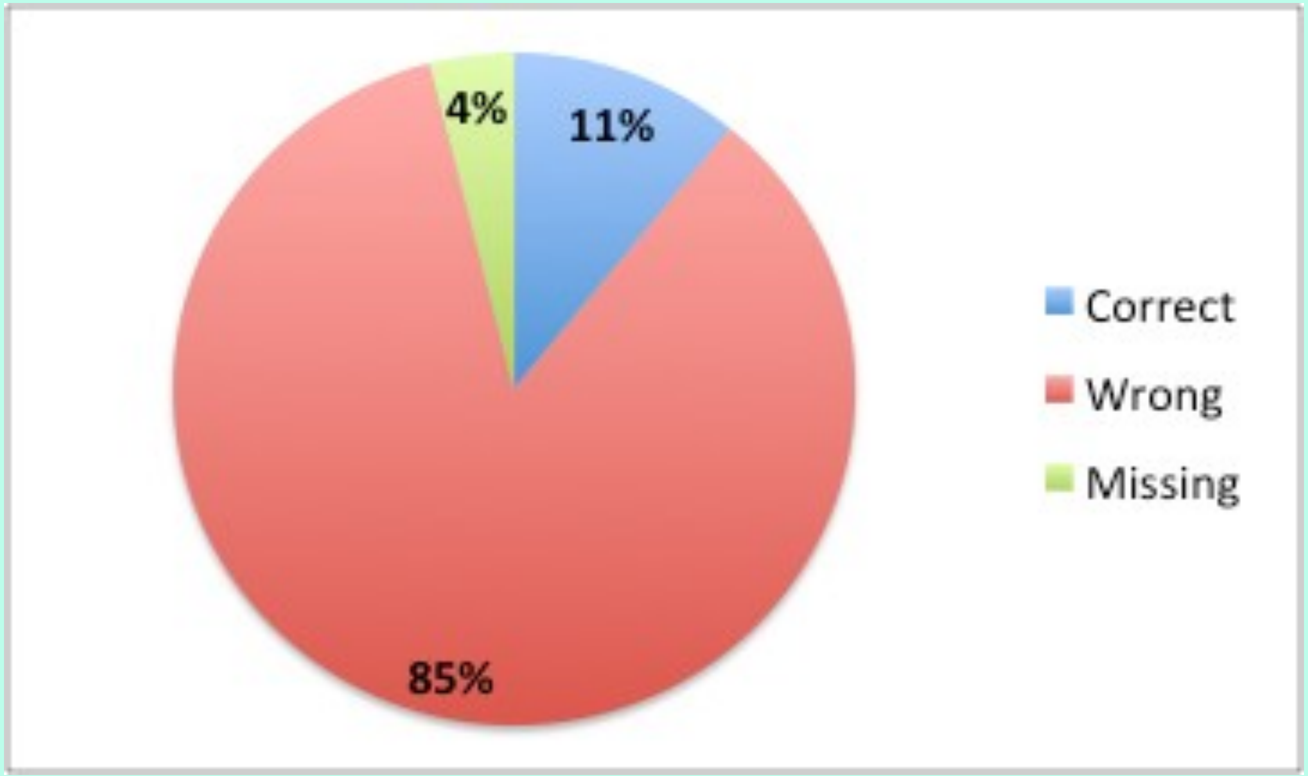
*Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri conosciuti*… (Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado, Indicazioni Nazionali )

**Place on the line the following numbers:**

2    2,5    $\frac{3}{2}$    $\frac{5}{10}$




Item D8 from INVALSI test administered in grade 6 (2011)




Results of Item D8

**D27.** $\frac{4}{8}$ **e 0,5 indicano la stessa quantità?**

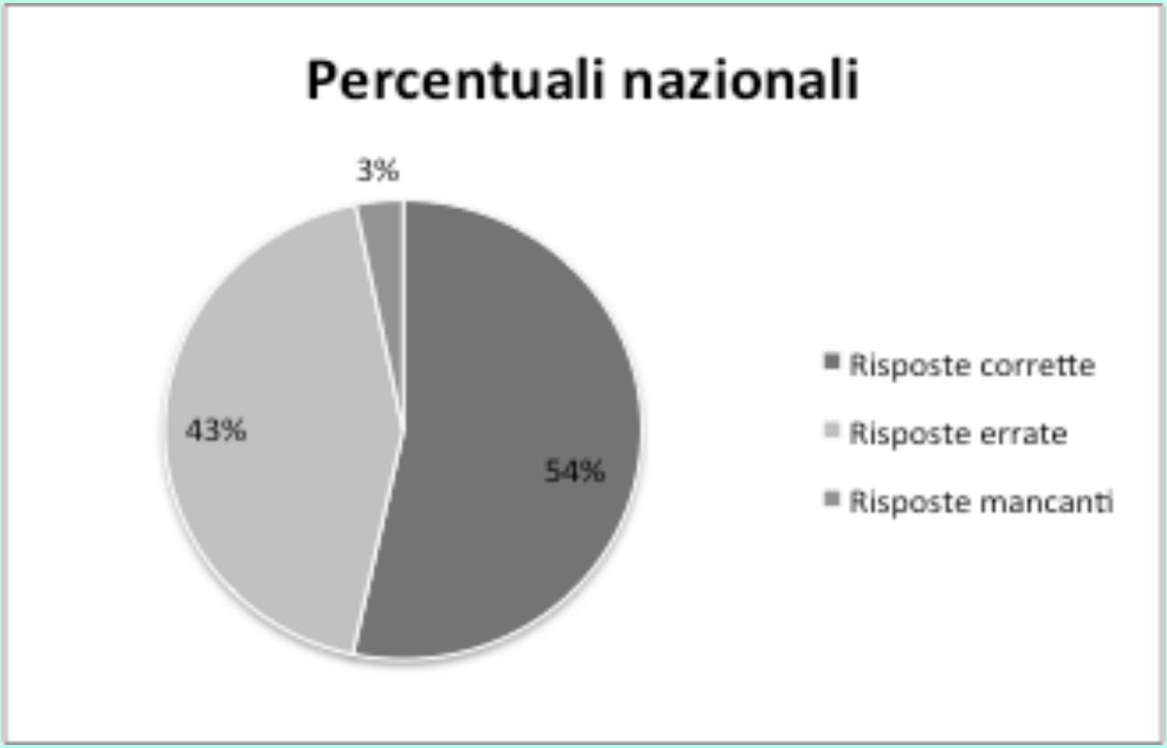
☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5

☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$

☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale

☐ D. Sì, perché valgono entrambi la metà di un intero

**Domanda D27 – Livello 05 a.s. 2009-2010**




**Percentuali nazionali domanda D27, livello 05, a.s. 2009-10**

I dati e i grafici sono tratti dal sito del database delle domande INVALSI http://www.gestinv.it/ .

I vari dati raccolti evidenziano come il cammino verso **l'integrazione** del sistema numerico dei numeri naturali, di quello dei decimali e delle frazioni **in una sola e coerente struttura numerica**, sia particolarmente **critico**, richiedendo di volta in volta riconversioni e riassestamenti di concetti precedentemente appresi.

L'argomento *numeri decimali* è uno di quelli in cui "***vi è conflitto tra concetti appresi precedentemente e concetti acquisiti successivamente, cosicché idee ormai familiari possono interferire con l'apprendimento di altre nuove***", Resnick et al (1989).

Il fatto che alcune conoscenze siano acquisite solo in modo parziale può **far insorgere errori**, il più delle volte temporanei, dovuti allo sforzo di interpretare comunque ciò che viene chiesto e di fornirne quindi una risposta, rifacendosi ad ambiti concettuali (nella fattispecie numeri naturali e frazioni), meglio padroneggiati.

*"Da un punto di vista cognitivo quasi tutti i tipi di insegnamento sono* ***incompleti*** *nel senso che non è possibile in ogni singola dimostrazione o spiegazione coprire tutti i casi speciali o tutte le possibili implicazioni di principi e regole che possono presentarsi.* ***L'istruzione****, come tutte le umane forme di* ***comunicazione****, procede sotto l'implicita assunzione che lo studente userà il materiale a lui presentato per fare inferenze e interpretazioni che completano e danno un senso a ciò che l'insegnante o il testo dice. Nel fare questo tipo di inferenze ed interpretazioni gli allievi fanno molto probabilmente* ***errori almeno temporanei****"*, Resnick et al (1989).

Il cammino che porta ad estendere il sistema numerico dei numeri naturali sembra sottolineato da alcune **regole scorrette**, che non possono essere completamente evitate nell'istruzione, ma possono essere interpretate come **utili strumenti diagnostici**, in quanto sanciscono fasi intermedie, tappe di transizione lungo questo percorso (Bonotto 1999).

***0,15      1      0,1      1,5      0,5      1,05***

Vi è la **regola 1**, che porta ad affermare, di fronte al problema di confrontare numeri decimali con la stessa parte intera, che

1) "***il numero che ha un numero maggiore di cifre decimali è sempre maggiore***"

o più brevemente che

1') "***il numero più lungo è maggiore***".

La applica chi scrive che **0,15 è maggiore di 0,5**

# REGOLA 1

Il bambino che usa la **regola 1** è indubbiamente è ancorato al dominio dei numeri naturali e vede il numero decimale come **giustapposizione** di due numeri naturali, separati dalla virgola;

tratta quindi la parte decimale come se fosse un numero intero

***"0,15 è maggiore di 0,5 perchè 15 è maggiore di 5"***

e applica un algoritmo che funziona per numeri naturali

***"il numero più lungo è maggiore"***

In chi usa questa regola non sembra esserci nessuna consapevolezza che la parte decimale di un numero decimale rappresenta **la parte frazionaria** di un intero, cosicché nessuna conoscenza sulle frazioni viene evocata; non è assolutamente chiaro **il significato della rappresentazione decimale**, **del ruolo delle cifre presenti e della loro posizione** (Bonotto, 1993).

Vi è poi la **regola 2**, in qualche modo “opposta” alla precedente, che è quella che porta invece ad affermare che

2) “***il numero che ha un numero minore di cifre decimali è sempre maggiore***”

o più brevemente che

2') “***i numeri più corti sono maggiori***”.

La applica chi scrive che **0,1 è maggiore di 0,15**

# REGOLA 2

Il bambino che usa la regola 2 fa chiaramente riferimento al dominio delle conoscenze sui numeri frazionari con un ragionamento del tipo:

***"il numero più corto ha decimi, quello più lungo ha decimi e centesimi, e i decimi sono maggiori dei centesimi".***

È consapevole che la parte decimale di un numero decimale rappresenta la parte frazionaria di un intero e quindi richiama le proprie conoscenze sulle frazioni

"***più sono le parti in cui un intero è diviso, più piccole esse sono***".

Sa che il numero delle cifre della parte decimale determina la grandezza delle parti, ma non riesce a coordinare l'informazione sulla **grandezza delle parti** con l'informazione sul **loro numero**.

Ha perciò qualche difficoltà a comprendere se le cifre presenti esplicitamente nella parte decimale corrispondano al **numeratore** o al **denominatore** di un ordinaria frazione (Bonotto, 1993).

## Difficoltà nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica: motivazioni

Spesso questa disciplina viene presentata come

una sequenza di nozioni, procedure ed algoritmi

spesso slegati tra di loro, senza alcun nesso, senso o motivazione.

Manca poi un vero raccordo tra gli ordini scolastici per cui spesso non si sfrutta adeguatamente quanto appreso (e/o come è stato appreso, anche perche sovente lo si ignora) negli ordini scolastici precedenti

**Difficoltà nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica: motivazioni**

Un’altra causa è stata identificata nella

**separazione**

fra

**le pratiche di insegnamento e di apprendimento della matematica scolastica**

**la ricchezza di esperienze che gli alunni maturano al di fuori della scuola**

mentre

"*il potere cognitivo, le capacità di imparare e le attitudini all'apprendimento vengono* ***incrementate*** *mantenendo l'ambiente dell'apprendimento legato al contesto culturale. ... È ben documentato il fatto di bambini e adulti che riescono "matematicamente" bene nel loro* ***ambiente non scolastico****, a contare, misurare, risolvere problemi e giungere a delle conclusioni usando arti e tecniche [****tics****] volte a spiegare, comprendere, far fronte al loro ambito [****mathema****], che hanno imparato nel loro ambiente culturale [****ethno****]*" (D'Ambrosio, 1995).

Molti studi mostrano come, ad esempio, gli algoritmi aritmetici, tradizionalmente insegnati a scuola per fornire agli studenti potenti procedure generali, non sempre aiutano quest'ultimi nei contesti extra-scolastici e che le strategie sviluppate nella pratica appaiono più efficienti degli algoritmi scolastici.

“*Certamente alcuni soggetti, particolarmente dotati per gli algoritmi, imparano ad applicare adeguatamente gli algoritmi che sono loro imposti; gli altri (forse la maggioranza) non riescono ad identificare i nuovi algoritmi con quelli ... che essi hanno costruito con operazioni di abbreviazione e di ricerca in linea diretta. Non riescono perché nel passato è stato loro chiesto di imparare delle cose che eccedevano le loro capacità mentali. Anche se imparano gli algoritmi senza alcuna lacuna, tuttavia non sono capaci di applicarli nelle situazioni concrete della vita quotidiana … .*
*I ricercatori hanno messo in rilievo queste ‘ricadute’ e si sono meravigliati; ma raramente esse sono diagnosticate come conseguenze dell’insegnamento, perché non si era presa in considerazione alcuna ipotesi di insegnamento alternativo mentre si insegnava il nuovo algoritmo*” (Freudenthal, 1994).

# LE QUATTRO DISCONTINUITÀ

Pur riconoscendo la specificità di entrambi i contesti,

• la scuola si concentra sulla prestazione individuale, mentre il lavoro mentale all'esterno è spesso condiviso socialmente

• la scuola è finalizzata a incoraggiare il pensiero privo di supporti, mentre il lavoro mentale fuori della scuola include abitualmente strumenti cognitivi

• la scuola coltiva il pensiero simbolico, laddove l'attività mentale fuori della scuola è direttamente coinvolta con oggetti e situazioni

• la scuola ha il fine di insegnare capacità e conoscenze generali, mentre all'esterno dominano le competenze specifiche per la situazione"

[Resnick L.B. (1887), Learning in school and out, *Educational Researcher*, 16(9), 13-20, tradotto in Pontecorvo, Ajello, Zucchermaglio (a cura di) *I contesti sociali dell'apprendimento* (pp. 61-83), Led, Milano, 1995] e che alcune differenze sono intrinseche, e quindi non eliminabili, noi riteniamo che altre differenze possano essere ridotte, e che anzi nelle attività in classe **si possano e debbano ricreare**, almeno parzialmente, **quelle condizioni che rendono l'apprendimento extrascolastico spesso più efficace**.

Si sono quindi progettati e realizzati alcuni teaching experiments, al fine di abbattere "***l'impermeabilità della membrana che separa l'esperienza della scuola e dell'aula da quella della vita***" (Freudenthal, 1994).

In tali studi si è indagata la possibilità di creare una nuova tensione tra la matematica scolastica e la realtà extrascolastica, con la sua matematica incorporata, attraverso situazioni didattiche in cui oltre a ***matematizzare il quotidiano*** si cerca di ***quotidianizzare la matematica*** (Bonotto, 2007).

## PROBLEM SOLVING/PROBLEMI A PAROLE

Nella usuale prassi scolastica il processo di legare la matematica scolastica con la realtà extrascolastica è ancora sostanzialmente delegato ai classici problemi a parole.

Questi, oltre a rappresentare l'interfaccia tra questi due contesti, i problemi a parole spesso costituiscono l'unico esempio di problem solving.

# PROBLEMI A PAROLE

Molte ricerche hanno evidenziato come la pratica di risolvere i problemi a parole nella matematica scolastica

- contribuisca ad alimentare l'idea di una separazione fra la matematica scolastica e quella extrascolastica;

- favorisca l'esclusione di considerazioni di tipo realistico (si veda per l'Italia Bonotto & Wilczewski, 2007),

- generi un processo di "*suspension of sense-making*" (Schoenfeld, 1991)

- raramente sviluppi negli alunni la capacità di matematizzazione del reale e di modellizzazione matematica (per una panoramica Verschaffel, Greer & De Corte, 2000; Bonotto 2007).

La causa è dovuta principalmente a

- al carattere **stereotipato** dei problemi presenti nei libri di testi più frequentemente adottati a scuola (Nesher, 1980; Wyndhamn & Säljö, 1997),

- al **modo** e al **contesto** in cui essi vengono presentati, dovuti alla cultura scolastica corrente sulla risoluzione dei problemi matematici (**“*classroom climate*”,** Gravemeijer, 1997; Palm, 2008)**,**

- **alle aspettative e convinzioni degli insegnanti** nei confronti della matematica (Verschaffel, De Corte, & Borghart, 1997; Bonotto & Wilczewski, 2007).

"*Il contesto* [del problema del macellaio, n.d.r.] *è il libro di testo, piuttosto che la realtà, ovvero, in altri termini, dà un'immagine pseudoisomorfa del mondo. Nel contesto del libro di testo ogni problema ha una sola soluzione: non vi è posto per la realtà, con i suoi problemi insolubili, oppure che ammettono più soluzioni. Si suppone che lo scolaro scopra i* ***pseudo-isomorfismi*** *considerati dall'autore del libro di testo, e risolva i problemi, che si presentano come se fossero collegati con la realtà, per mezzo di questi pseudo-isomorfismi. Non vale forse la pena di indagare se e come questa didattica alleva gli* ***atteggiamenti contrari alla matematica****, e come mai le reazioni dei ragazzi contro questa deformazione mentale sono così varie?*", Freudenthal, 1994.

Tradizionalmente il problema scolastico è considerato un'imitazione non della vita reale, ma di altri problemi scolastici. Tale concezione condivisa crea un circolo vizioso che si esplica nel generare nuovi problemi basandosi sulla struttura di quelli tradizionali.

I bambini generalmente affrontano quindi il problema combinando in qualche modo testo, dati e certi schemi risolutivi interiorizzati nella propria esperienza scolastica, e vedono il problema a parole svolto in classe come qualcosa che non ha niente a che fare con i problemi reali.

"*… ed è difficile che in questo modo i problemi a parole richiamino alla mente degli allievi esperienze o idee collegate a situazioni realmente vissute. Viene quindi a **mancare** il riferimento al 'senso' della situazione descritta, utile anche a comprendere il 'significato' della richiesta*" (Bonotto, 2007).

Questo fa sì che gli alunni non forniscano risposte di tipo realistico anche di fronte a problemi di tipo non stereotipato.

***"Un autobus militare contiene 36 soldati. Se 1128 soldati vengono portati nella zona di allenamento, quanti autobus sono necessari?***" (Schoenfeld, 1987)

Frequentemente viene poi utilizzato dagli insegnanti il metodo dell'identificazione delle parole chiave per risolvere i problemi (come ad esempio "mettere assieme", "restano", "meno di" e così via).

Emblematiche sono le risposte date dai bambini, ma anche da insegnanti in formazione (si veda Bonotto & Wilczewski, 2007) al problema

***"Quale sarà la temperatura dell'acqua in un contenitore se metti insieme 1 litro di acqua a 40° C e 1 litro di acqua a 20° C?"***

problema che riprende uno di Nesher (1980) sull'attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico.

## Problema del capitano

***Ci sono 26 pecore e 10 capre su di una nave, qual è l'età del capitano?***

(IREM di Grenoble, 1980) poi ripreso da molti autori.

# Contratto Didattico

Alla base c’è l’instaurarsi di un “*contratto didattico*”, nel senso datone da Brousseau (1984), che condiziona a tal punto la pratica scolastica da imporre regole implicite, ruoli e aspettative del tutto fuorvianti.

I bambini fin dai primi anni della scuola primaria, vengono a stabilire con l’insegnante accordi ben precisi, espliciti, su come devono accettare lo schema generale di problema e su quale deve essere la loro attività, una volta assegnato il compito (Bonotto & Baroni, 2011).

# Contratto Didattico

Nel 1997 è stata compiuta una ricerca Van Lieshout, Verdwaald e Van Herk allo scopo di confrontare le risposte di alunni delle scuole primarie con quelle di alunni frequentanti scuole “speciali”.

È emerso che gli alunni delle scuole speciali hanno fornito un maggior numero di risposte di tipo realistico ai problemi rispetto agli alunni delle scuole “normali”.

L’ipotesi è che vi sia differenza tra le regole del contratto didattico stipulato, al quale gli alunni imparano presto a adeguare il proprio pensiero, nei due tipi di scuole.

# Contratto Didattico

Si instaurano quindi regole implicite, profondamente radicate, per cui

- un problema matematico ha sempre una, ed una sola, risposta corretta, che si ottiene dalla semplice applicazione meccanica delle quattro operazioni aritmetiche
- vi è sempre solo un solo modo corretto per risolvere un problema matematico
- i numeri presenti nei problemi sono tutti necessari

Infine, la pratica dei problemi a parole è **relegata** alle attività in classe, ha cioè un suo senso ed una collocazione temporale e spaziale **solo all’interno della scuola**; raramente gli studenti incontreranno questo tipo di attività fuori dell’ambito strettamente scolastico.

Tutto questo fa emergere una **differenza** sulla funzione dei problemi a parole nella educazione matematica.

I ricercatori in didattica della matematica e gli estensori di molti nuovi curricula, tra cui quello italiano,

**collegano i problemi a parole alle attività di**

**problem solving**

**modellizzazione matematica**

Gli insegnanti generalmente riconoscono ai problemi a parole un altro ruolo, e cioè quello di essere sostanzialmente degli

**ESERCIZI**

nelle quattro operazioni fondamentali.

Questo ruolo ha pure una sua giustificazione ed una ragionevole collocazione all'interno dell'insegnamento della matematica, ma certo non quello

**di favorire un processo**

**di matematizzazione e di modellizzazione del reale**.

# ESEMPIO DA UN LIBRO DI TESTO

## RIPASSIAMO L'ADDIZIONE

Osserva, leggi e completa.

Sul ramo del grande pino ci sono
8 pigne verdi e 6 pigne marroni.
Quante pigne in tutto?

Dati: ........ pigne verdi

........ pigne marroni

? pigne in tutto

Operazione: $8 + 6 =$ ..............

Risposta: In tutto le pigne sull'albero sono: ..............................

• Quale operazione hai eseguito?

..............................................................................

**Ricorda**

L'addizione è l'operazione che serve a unire due quantità.
Con l'addizione calcoli quanti in tutto.

Se si vuole raccogliere l'invito presente in molti documenti nazionali

"*… l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza **ricchi** per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, non unicamente come bagaglio di nozioni*" (Matematica 2001, Documento Unione Matematica Italiana).

*"Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni **autentiche e significative**, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola"* (Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria, 2007, ripreso nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012 )

e in documenti della Comunità Europea riguardanti la competenza matematica

***“La competenza matematica è l’abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi nelle situazioni quotidiane”***

(Raccomandazioni del Parlamento e Consiglio Europei del 2006 sulle competenze chiave per il Lifelong Learning)

Se l’obiettivo è **anche** preparare gli individui a “***sintonizzarsi adattivamente con i tipi di situazioni naturali che incontreranno fuori della scuola***”, come auspicato da Resnick, 1995,

**sono necessari dei cambiamenti nelle attività proposte**.

# CAMBIAMENTO "INTERNO"

Una possibilità è quella di modificare la tipologia di problemi proposti a scuola come ad esempio

-nel progetto *RME (Realistic Mathematics Education*), sviluppato dal Freudenthal Institute di Utrecht,

-nel gruppo di ricerca diretto da Verschaffel del *Centre for Instructional Psychology and Technology* dell'Università di Leuven.

Vengono presentate, anche nei libri di testo, varie tipologie di problemi (ad esempio **problemi con più soluzioni possibili**, o **problemi irrisolvibili**).

## CAMBIAMENTO "ESTERNO"

Un'altra possibilità (che si può affiancare all'altra in quanto possono coesistere entrambe) è quella di sostituire i classici problemi a parole con un altro tipo di attività, che usano "***contesti ricchi e aperti alla matematizzazione***" (Freudenthal, 1994; Bonotto, 1999 e 2007).

Qui il termine **"contesto"** si riferisce a "***quel dominio della realtà che può essere matematizzato***", mentre il termine **"ricco"** sottolinea le molte opportunità di strutturazione che la situazione può offrire.

# CAMBIAMENTO "ESTERNO"

In accordo con l'approccio della Realistic Mathematics Education della scuola di pensiero olandese (Treffers, 1991) noi riteniamo che

" *la matematica informale extrascolastica e quella formale scolastica, nonostante le loro specifiche differenze, non debbano essere viste come due entità disgiunte e indipendenti. Si deve piuttosto, mirare a un processo di sviluppo graduale, in cui la matematica formale si fa avanti come una naturale estensione della realtà esperienziale dello studenti … la progressiva matematizzazione deve condurre ad algoritmi, concetti e notazioni radicati in un percorso di apprendimento che inizia con la conoscenza esperienziale ed informale che i bambini hanno della realtà"* (Gravemeijer, 1999).

L’idea non è solo quella di motivare gli studenti attraverso contesti presi dalla vita di ogni giorno ma di attingere a contesti che fanno parte delle esperienze reali degli studenti e che possono essere usati come punti di partenza per una ***matematizzazione progressiva*** (Gravemeijer, 1999),

al fine di favorire anche una disposizione verso la

**modellizzazione matematica**

e l’attivazione di processi non solo di

**problem solving**

ma anche di

**problem posing**

# SUL PROBLEM SOLVING

Sul piano della ricerca sul problem solving gli studi si sono focalizzati su tre grandi aree tematiche:

- individuazione delle variabili che determinano le difficoltà che si incontrano nel risolvere i problemi;

- individuazione delle caratteristiche che distinguono i “buoni” dai “cattivi” risolutori di problemi;

- l’insegnamento di strategie risolutive per risolvere un qualsiasi problema, individuandone fasi o passaggi.

# SUL PROBLEM SOLVING

Negli anni ’90 ricercatori come Schoenfeld hanno enfatizzato la necessità di maggiori ricerche nel campo della metacognizione e delle credenze degli studenti.

È cresciuta, inoltre, la necessità di studiare il processo di problem solving al di fuori delle tradizionali pratiche scolastiche: in particolare le ricerche sul problem solving matematico si sono estese alle esperienze affrontate nell’ambiente quotidiano, a come le persone adattano ed utilizzano la matematica nella vita di ogni giorno e nell’esperienza lavorativa.

# SUL PROBLEM SOLVING

Vengono proposte nuove definizioni di problem solving che cercano di includere le nuove prospettive di ricerca (si veda ad esempio Lesh e Zawojewski, 2007).

A differenza dell'interpretazione tradizionale del problem solving che lo vedeva come una ricerca di procedure che potessero condurre il risolutore dalla situazione iniziale agli obiettivi del problema, questa nuova definizione concepisce il processo di problem solving come

**cicli ripetuti**
**di interpretazione dei dati presenti e degli obiettivi di un problema**

# PROBLEM SOLVING/MODELLIZAZIONE

Questa nuova visione del problem solving abbraccia l’idea che il problem solving matematico consista nel vedere le situazioni matematicamente, non semplicemente nell’applicare regole, procedure e abilità.

Le persone nelle situazioni di problem solving creano, perfezionano e adattano le diverse interpretazioni, i modi di pensare, le procedure.

Tale apprendimento inizia dallo sviluppo di sistemi concettuali che danno senso alle situazioni di vita reale, nelle quali c’è la necessità di **creare, rivedere o adattare un modello matematico.**

# PROBLEM SOLVING/MODELLING PROCESS

L'attività di problem solving viene così inclusa nel

"*modeling process*"

ciclo che consta di più fasi:

Description
Manipulation
Prediction
Verification
Communication

Le problematiche individuate nella fase di verifica spesso provocano un nuovo ciclo che porta alla revisione delle soluzioni provvisorie.

# MODELLIZZAZIONE MATEMATICA

Il termine **modellizzazione matematica** non si riferisce solamente ad un processo in cui una situazione deve essere

***problematizzata e capita,***
***tradotta in termini matematici,***
***trattata matematicamente,***
***riportata nella situazione originaria reale,***
***valutata,***
***comunicata.***

Oltre a questo tipo di **modellizzazione**, che richiede che lo studente abbia già a disposizione qualche **modello matematico** e strumenti per matematizzare, c'è un altro tipo di modellizzazione, in cui le attività sono usate come veicolo ***per lo sviluppo*** (piuttosto che ***per l'applicazione***) di concetti matematici (Greer, Verschaffel & Mukhopadhyay, 2007).

# MODELLIZZAZIONE EMERGENTE

Questo secondo tipo di modellizzazione è chiamato '**emergente**' in Gravemeijer ed è focalizzato sui **processi di apprendimento a lungo termine**, in cui un modello si sviluppa a partire da un modello informale e situato, '**un modello di**', in una struttura matematica generalizzabile, '**un modello per**'.

"*L'idea è che gli studenti costruiscano modelli per sé e che questi modelli servano da base per lo sviluppo di conoscenza matematica formale. Per essere più precisi, all'inizio, si costituisce un modello come modello di una situazione legata al contesto specifico. Poi il modello viene generalizzato … Perciò il modello cambia in carattere, diventa un'entità per proprio conto. In questa nuova forma può funzionare come una base, un modello per il ragionamento matematico a livello formale…… nell'educazione matematica realistica i modelli sono ispirati da strategie informali, sia usati dagli studenti o nella storia della matematica*" (Gravemeijer, 1994).

I "*modelli di*" e i "*modelli per*", quindi, sono per Gravemeijer posti ad un livello intermedio tra la conoscenza situata e la conoscenza astratta, cioè tra le situazioni reali e la matematica formale.

# MODELLIZZAZIONE EMERGENTE

I risultati di uno studio da noi condotto (Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2013 e 2014) evidenziano come i bambini sappiano produrre strategie efficienti di calcolo informale attribuendo senso alle quattro operazioni aritmetiche che essi utilizzano per risolvere le situazioni problematiche presentate.

Gli alunni risolvono problemi numerici creando modelli alternativi alle usuali procedure di calcolo relative alle quattro operazioni aritmetiche. In accordo con Gravemeijer noi riteniamo che la costruzione di questi modelli auto-sviluppati possa servire da base per lo sviluppo di conoscenza matematica formale.

# SULLA MODELLIZZAZIONE

Anche se è molto difficile, se non impossibile, fare una distinzione tra i due aspetti della modellizzazione matematica, è chiaro che essi corrispondono a differenti fasi nel processo di insegnamento/apprendimento e a differenti attività per l'istruzione.

Ad esempio a livello di scuola primaria il focus può essere più sul secondo aspetto della modellizzazione matematica, a livello scuola secondaria (specie superiore), il focus può essere più sul primo aspetto.

D'altra parte il concetto di modello è presente nelle *Linee Guida* per il *triennio* (indirizzo economico, tecnologico) così come nelle *Indicazioni Generali, triennio* (Linee generali e competenze, e negli Obiettivi specifici di apprendimento).

# SULLA MODELLIZZAZIONE

Noi riteniamo che una introduzione precoce di una idea di base sulla modellizzazione è non solo possibile ma anzi auspicabile anche a livello di scuola primaria.

L'attività di modellizzazione può rivelarsi un mezzo per riconoscere il potenziale della matematica come strumento critico per interpretare e capire la realtà in cui gli studenti vivono, la loro comunità di appartenenza o la società in generale.

Crediamo infatti che un importante obiettivo, per lo meno della scuola dell'obbligo, sia quello di insegnare ai ragazzi ad analizzare ed interpretare, anche criticamente, la realtà in cui sono immersi, a capirne codici e messaggi, per non restarne esclusi o fuorviati (Bonotto, 2007).

# SULLA MODELLIZZAZIONE

Ovviamente le caratteristiche di **utilità e pervasività** della matematica sono solo due delle molteplici facce di questa disciplina e non possono certo esaurirne le peculiarità, il valore e la rilevanza culturali; ciò non di meno noi riteniamo che questi due elementi possano essere adeguatamente sfruttati dal punto di vista educativo per cercare di cambiare i comportamenti e gli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica.

# SULLA MODELLIZZAZIONE

Se, nella pratica scolastica, si vogliono favorire e stimolare processi di modellizzazione matematica, vanno ricercate situazioni problematiche, provenienti dal mondo reale, la cui soluzione non si riduca alla selezione e all'esecuzione di una o più operazioni con i numeri dati.

Gli alunni dovranno essere posti di fronte ad attività in cui devono selezionare le informazioni spogliandole dei dettagli irrilevanti, ricercare ed individuare relazioni e regolarità che poi interpretano e possono descrivere mediante grafici, tabelle, formule.

Di solito il prodotto così ottenuto necessita poi di revisioni successive, di aggiustamenti e ristrutturazioni, o raffinamenti, per giungere poi alla risoluzione ritenuta valida, magari in prima approssimazione, per quel contesto (Bonotto, Baccarin, Basso & Feltresi, 2010).

# SULLA MODELLIZZAZIONE

In questo modo la situazione problematica indagata resta sempre in primo piano e risulta il riferimento continuo per la qualità della risoluzione ottenuta, nel senso che i dati, le risposte matematiche, vanno interpretati e convalidati nel contesto originale.

In questo senso il processo di modellizzazione matematica "*include un numero di cicli iterativi, in cui gli studenti si muovono avanti e indietro dai dati agli obiettivi, tornano indietro, e di nuovo si muovono verso gli obiettivi per testare le proprie ipotesi, per affinare i risultati ottenuti e migliorare le soluzioni trovate*" (Lesh & Doerr, 2003).

# SULLA MODELLIZZAZIONE

Assieme a processi quali organizzare dati, spiegare, giustificare, rappresentare, andranno attivate anche competenze sociali legate alla necessità di confrontarsi e collaborare con gli altri; non vanno infatti trascurati gli aspetti della costruzione sociale delle conoscenze.

Gli studenti lavorano per produrre un risultato che deve essere condivisibile in modo esplicito.

Queste esperienze di lavoro scolastico richiedono infatti momenti di confronto fra pari dove illustrare le proprie proposte mediante descrizioni, spiegazioni e rappresentazioni matematiche. Le discussioni sono occasioni per verbalizzare idee e pensieri, per rendere esplicite conoscenze di contenuto e di processo, ed in cui possono nascere conflitti, necessità di revisioni, di nuove congetture e risoluzioni.

# SULLA MODELLIZZAZIONE

L'attività di modellizzazione essendo simile ad un'attività di ricerca, richiede un approccio costruttivo ed una metodologia attiva, partecipativa, collaborativa e, quindi, anche con un elevato potenziale inclusivo.

Queste attività, oltre a permettere agli studenti di riconoscere il potenziale della matematica come strumento critico per interpretare e capire la realtà in cui vivono, la loro comunità di appartenenza e la società in generale, in una prospettiva sempre più situata, hanno l'ulteriore vantaggio di favorire naturalmente l'attivazione di processi non solo di *problem solving*, ma anche di *problem posing*.

# SUL PROBLEM POSING

Dopo oltre trent'anni di studi sul problem solving si è iniziato a riflettere sul fatto che sviluppare l'abilità di porre dei problemi matematici è importante almeno quanto sviluppare le abilità di risoluzione dei problemi.

*"Problem posing is of central importance in the discipline of mathematics and in the nature of mathematical thinking, and it is an important companion to problem solving"* ed ancora

"Problem formulating should be viewed not only as a *goal* of instruction but also as a *means* of instruction. The experience of discovering and creating one's own mathematics problems ought to be part of every student's education. Instead, it is an experience few students have today – perhaps only if they are candidates for advanced degrees in mathematics" (Kilpatrick, 1987).

# SUL PROBLEM POSING

Negli Stati Uniti, ad esempio, *The Principles and Standards for School Mathematics* del 2000 richiedono che gli studenti "*formulate interesting problems based on a wide variety of situations, both within and outside mathematics*".

In Cina *The Interpretation of Mathematics Curriculum* (2001) sottolinea che le abilità degli studenti nel problem solving e nel problem posing dovrebbero essere messe in risalto e che gli studenti dovrebbero imparare a trovare dei problemi e a porsi dei problemi "*in and out of school of the context of mathematics*".

In Italia, nel 2001, l'Unione Matematica Italiana ha riconosciuto il problem posing come una delle attività significative da sviluppare all'interno dei nuclei fondanti del sapere matematico.

# SUL PROBLEM POSING

*"Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta ad un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e* ***porsi problemi significativ****i* ….." (Indicazioni Nazionali per il curricolo 2007 e 2012).

# SUL PROBLEM POSING

Il processo di problem posing può essere definito in vari modi (Silver & Cai, 1996).

Silver (1994) ha analizzato il problem posing come processo strettamente correlato al problem solving, che può presentarsi prima, durante o dopo la soluzione di un problema:

*pre-solution posing*: vengono generati problemi originali a partire da una situazione stimolo presentata;

*within-solution posing*: vengono riformulati i problemi che si stanno risolvendo;

*post-solution posing*: vengono modificati gli obiettivi o le condizioni di un problema già risolto per generarne uno nuovo.

# SUL PROBLEM POSING

Molti studi hanno cercato di incorporare attività di problem posing in classe.

Questi studi mettono in evidenza che attività di problem posing hanno avuto una influenza positiva sul pensiero degli studenti, sulle loro abilità nel problem solving, sul loro atteggiamento e fiducia e nella matematica e nel problem solving, ed anche sulla creatività (Bonotto 2006, 2013 e 2015; Bonotto & Dal Santo, 2015; English, 1998 e 2003; Leung, 1996; Silver, 1994).

# SUL PROBLEM POSING

Noi consideriamo il problem posing come il processo secondo il quale **gli studenti**, in base alle loro esperienze, **costruiscono delle interpretazioni personali di situazioni concrete e le formulano come problemi matematici significativi**.

Per gli studenti questo processo diventa perciò una opportunità di interpretazione e di analisi critica della realtà.

Nelle nostre proposte il processo di problem posing è supportato dall'uso di opportuni **materiali/strumenti/artefatti** che possono servire a creare

- contesti ricchi e fortemente legati alla realtà quotidiana,

- situazioni di tipo semi-strutturato.

# DEPLIANT GARDALAND





## TARIFFE GRUPPI 2011

Il biglietto di ingresso a Mirabilandia è valido **per due giorni consecutivi** ed include l'accesso a **tutte le attrazioni e a tutti gli spettacoli ad eccezione dell'Area Mirabilandia Beach.** Il primo giorno di utilizzo del biglietto deve coincidere con la data di emissione.

### INGRESSO MIRABILANDIA

| | | |
|---|---|---|
| **GRUPPO MISTO** (Min. 20 persone paganti) | (1 gratuità ogni 10 persone paganti) | € 24,00 |
| **GRUPPI SCUOLE*/COLONIE*** (Min. 20 persone paganti) | (1 gratuità ogni 10 persone paganti) | € 20,00 |
| **GRUPPI PARROCCHIE*/SENIOR (OVER 60)** (Min. 20 persone paganti) | (1 gratuità ogni 10 persone paganti) | € 20,00 |
| **BAMBINI** (Fino a 100 cm) | | Gratuito |
| **DISABILI NON AUTOSUFFICIENTI** | | Gratuito |
| **ACCOMPAGNATORI DI DISABILI** | | € 20,00 |

* E' richiesta una lettera di presentazione della Scuola/Colonia/Parrocchia.
- Le tariffe Gruppi (compresa quella per l'ingresso a Mirabilandia Beach) vengono riconosciute esclusivamente alle comitive che hanno effettuato regolare prenotazione almeno **2 giorni prima della visita**.
- In mancanza di prenotazione, ai gruppi di minimo 20 persone che possono dimostrare di essere arrivati al Parco in pullman, sarà applicata la tariffa di € 26,00. In tal caso non saranno concesse gratuità.
- Ingresso omaggio per l'autista del pullman.

### INGRESSO MIRABILANDIA BEACH

| | | |
|---|---|---|
| **SUPPLEMENTO INGRESSO MIRABILANDIA BEACH GRUPPI** (Min. 15 persone paganti) | (1 gratuità ogni gruppo) | € 7,00 |
| **BAMBINI (Fino a 100 cm) E DISABILI NON AUTOSUFFICIENTI** | | Gratuito |

Agli accompagnatori di disabili viene applicata la regolare tariffa di Euro 7,00. Il biglietto supplementare per l'ingresso a Mirabilandia Beach è acquistabile solo se si è in possesso di regolare e valido titolo per l'ingresso al Parco di Mirabilandia. La Promozione "*Il giorno dopo entri gratis!*" non è valida per l'accesso all'Area Mirabilandia Beach. Il visitatore che, usufruendo di questa promozione per il Parco di Mirabilandia, desideri avere accesso all'Area Mirabilandia Beach è tenuto a corrispondere il regolare supplemento di ingresso. Il biglietto è valido esclusivamente nella giornata di emissione e include l'utilizzo gratuito di: docce, spogliatoi, ombrelloni e lettini da spiaggia, secondo disponibilità.

### MENU PER GRUPPI

| MENÙ | LOCALE | TARIFFA | COMPOSIZIONE |
|---|---|---|---|
| PIZZA TIME | Pizza Time | € 7,50 | Trancio di pizza farcita, patatine fritte e bibita media a scelta. |
| AMARCORD | Bar del Laghetto | € 7,50 | Piadina farcita, patatine fritte e bibita media a scelta. |
| CLASSICO | Self Service Drive in | € 11,00 | Pasta al pomodoro, cotoletta di pollo con patatine fritte, 1/2 litro acqua. |
| APPETITOSO | Self Service Drive in | € 13,00 | Primo, secondo caldo con contorno e bibita, a scelta. |
| GHIOTTO | Self Service Drive in | € 15,00 | Primo, secondo caldo con contorno, dolce e bibita, a scelta. |

Un buono pasto omaggio per ogni gruppo che prenota i pasti. Un buono ristorazione da € 10,00 per l'autista del pullman.

La Direzione del Parco si riserva la possibilità di modificare le condizioni e le tariffe senza alcun preavviso. I biglietti non sono rimborsabili anche in caso di maltempo, mancanza di elettricità o eventi di forza maggiore.

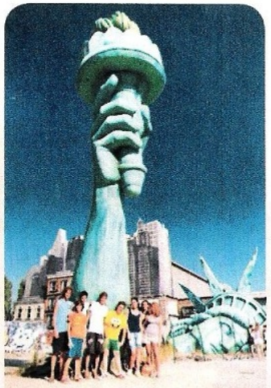
## PREVENDITA BIGLIETTI MIRABILANDIA

***ACQUISTA ANTICIPATAMENTE** CARNET* DI BIGLIETTI PER L'INGRESSO A MIRABILANDIA, A **TARIFFA SPECIALE!** **E' FACILE E CONVENIENTE!***

I biglietti acquistati in prevendita sono a "data aperta" e pertanto sono validi per accedere a Mirabilandia, senza passare dalle casse, in una qualunque giornata di apertura della stagione 2011. Possono essere utilizzati anche per mini gruppi oppure individualmente! Chiama subito e preacquista i tuoi biglietti. Te li spediremo all'indirizzo richiesto.

*PER INFORMAZIONI E ACQUISTI CONTATTA:*
**Ufficio Booking tel. 0544 561156 • booking@mirabilandia.it**

*Offerta soggetta a quantitativi minimi di acquisto e riservata ad Aziende, Società private di trasporto con pullman e Cral (Circoli ricreativi dopolavoro).



## LA RISTORAZIONE DI MIRABILANDIA

LE PROPOSTE SONO TANTISSIME, PER TUTTI I GUSTI E PER TUTTE LE ESIGENZE.

Alla *Locanda del Faro* si può scegliere "*à la carte*" ed assaporare la classica cucina italiana a base di carne e pesce o i piatti tipici romagnoli, ma il Parco offre anche un Self Service con cucina tradizionale, un ristorante con cucina messicana/pizzeria/griglieria, due Fast food (un *McDonald's* interno al Parco e un *McDrive* esterno, adiacente all'Area parcheggio) e tantissimi altri snack bar per veloci e gustosi intermezzi. Qualche esempio? Primi piatti, insalatone, tranci di pizza, bocconcini di pollo, patatine fritte, piadina farcita, hot-dog, kebab, ma anche frutta fresca, caramellata e al cioccolato! Per non parlare di gelati, granite e bibite di ogni tipo!
Ai **visitatori celiaci** viene riservata un'attenzione particolare: pietanze cucinate con **alimenti senza glutine** sono sempre disponibili durante gli orari di apertura dei ristoranti *Locanda del Faro, El Sombrero* e *Self Service Drive in.*
La prenotazione non è necessaria.

### MENU PER GRUPPI

- Nel caso in cui il Gruppo desideri prenotare dei **Menu**, la scelta è tra ben **5 proposte**, che vanno **dallo snack veloce al pasto completo da consumare comodamente seduti.**
- I menu devono essere prenotati anticipatamente, insieme ai biglietti di ingresso. In tal caso il Capogruppo riceverà all'arrivo, insieme ai biglietti di ingresso, anche un numero di **Buoni Pasto** corrispondenti ai menu prenotati. I Buoni pasto potranno così essere distribuiti subito ai componenti del gruppo che, se lo desiderano, possono recarsi **individualmente** al Locale indicato sul Buono e ritirare la loro consumazione consegnando personalmente il Buono alla cassa.
- Non è indispensabile che tutti i partecipanti del gruppo acquistino il menu. Tuttavia, **per ogni tipologia di menu**, eventualmente richiesta da ciascun gruppo, è necessario scegliere **un minimo di 10 buoni pasto, su un totale di almeno 15 menu per ciascun gruppo.**
- Anche per i visitatori celiaci all'interno di un Gruppo è prevista la possibilità di consumare **alimenti senza glutine.** Questa esigenza deve essere comunicata al momento del ritiro del menu. In questo caso il pasto potrà essere ritirato o consumato rivolgendosi esclusivamente presso il *Self Service Drive in.*

## E' IL TUO COMPLEANNO? SCONTO SPECIALE A MIRABILANDIA!

**INGRESSO AL PARCO.** Una ricorrenza speciale merita un dono speciale: tutti i visitatori che vengono al Parco nel giorno del loro compleanno **ricevono uno sconto del 50% sull'acquisto di un biglietto di ingresso individuale intero.** Il biglietto è valido per usufruire della promozione "Il giorno dopo entri gratis!". **E' necessario rivolgersi all'Ufficio Informazioni ed esibire un documento di identità con foto** (per i minori è sufficiente il tesserino sanitario).

**FESTA DI COMPLEANNO.** Se desideri organizzare una vera e propria festa di compleanno nel Parco, Mirabilandia ha preparato per te uno **speciale pacchetto: il festeggiato entra gratis** e non è indispensabile che il giorno del compleanno coincida con la data della festa!

### PACCHETTO "FESTA DI COMPLEANNO"

- **Partecipanti: min. 10** persone (incluso il festeggiato)
- **Luogo della festa:** *Self Service Drive in*
- **€ 10,50** per persona.

Il pacchetto prevede:
- **INGRESSO GRATUITO PER IL FESTEGGIATO**
- Buffet con torta e candeline, stuzzichini, bibite e spumante
- Intervento di una delle Mascotte del Parco per gli auguri di rito.
- **Prenotazione: necessaria con 5 gg di anticipo**

***NOTA BENE:** IL BIGLIETTO DI INGRESSO DEI PARTECIPANTI ALLA FESTA NON È INCLUSO NEL PACCHETTO*
***ATTENZIONE:** TUTTI I BIGLIETTI DI INGRESSO -IN OMAGGIO PER IL FESTEGGIATO E A PAGAMENTO PER GLI ALTRI PARTECIPANTI ALLA FESTA- DANNO DIRITTO ALLA PROMOZIONE "IL GIORNO DOPO ENTRI GRATIS!".*

La Direzione si riserva di modificare condizioni e tariffe senza preavviso.

# SUL PROBLEM POSING

Durante queste attività gli studenti devono:

**i) distinguere i dati significativi da quelli irrilevanti;**

**ii) scoprire le relazioni tra i dati;**

**iii) decidere se le informazioni in loro possesso sono sufficienti a risolvere il problema;**

**iv) ricercare se i dati coinvolti sono coerenti dal punto di vista numerico e contestuale.**

Queste attività sono tipiche del **processo di modellizzazione**, e sono simili alle situazioni da matematizzare che gli studenti hanno incontrato o incontreranno fuori dalla scuola, e che quindi possono preparare gli individui a "***sintonizzarsi adattivamente con i tipi di situazioni naturali che incontreranno fuori della scuola***"(Resnick et al, 1995).

# CONTESTI RICCHI”

I processi di modellizzazione e di problem posing sono stati supportati nei nostri studi dall’uso di opportuni *materiali/strumenti/ artefatti* che possono servire a creare dei “***contesti ricchi***” e fortemente legati alla realtà quotidiana (ad esempio scontrini, etichette, depliant, articoli di giornale, guide tv, telecomandi, ecc).

# SUGLI ARTEFATTI CULTURALI

Gli artefatti culturali sono "***strumenti costruiti dall'uomo, dalla storia, dalla cultura, che modificano l'attività umana e che mediano i rapporti che bambini e adulti hanno con il mondo***" Pontecorvo [1997].

Essi oltre a racchiudere la storia intellettuale di una cultura, hanno spesso delle teorie incorporate al loro interno che i fruitori accettano, spesso inconsapevolmente, quando li usano [Cole, 1985].

Un artefatto è quindi un **rappresentante**, un **testimone** della società in cui viviamo, della cultura a cui apparteniamo, dei mezzi e modi di comunicare tipici della nostra epoca (Bonotto, 1999), ed anche i giochi, matematici e non, rientrano in questa categoria.

Chiunque ponga un po’ di attenzione, cercando di vedere sotto altri occhi la realtà che lo circonda, può facilmente scoprire che c’è una grande quantità di matematica incorporata nella vita quotidiana.

“***Il nostro mondo ... è già stato matematizzato ad un tale livello che noi non ce ne accorgiamo neppure più, a meno che la nostra attenzione non sia attirata su questo fatto***”.

Non si tratta di spogliare l’artefatto da ciò che sembra impedire l’emergere dei contenuti disciplinari

“*È sbagliato guardare al contesto come ad un rumore che disturba il messaggio chiaro della matematica: il contesto è il messaggio, e la matematica è lo strumento per decodificarlo*” (Freudenthal),

si tratta di strutturare l’artefatto, contesto ricco di informazioni, dando organicità alle diverse sezioni e individuando i legami reciproci fra esse.

L'alunno può leggere e decodificare i segni e i simboli contenuti nell'artefatto (frutto di convenzioni e di conoscenze cristallizzate nella società) sulla base delle proprie esperienze e competenze, conservando il legame con la realtà garantito dal contesto; può analizzare e cogliere le relazioni fra i dati, dedurne delle conseguenze, e ritornare all'artefatto, interpretando e valutando i risultati rispetto alla situazione di partenza (Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2010).

La duplice natura di questi artefatti, di essere contemporaneamente "*materiali*" ed "*ideali*", in altra parole quella di appartenere sia al mondo della vita sia al mondo dei simboli, rende infatti possibile muoversi in modo significativo tra i due ambiti, dalle situazioni di riferimento ai concetti e, viceversa, dai concetti alle situazioni di riferimento, in un processo di "andate e ritorni" che non può che "rafforzare le rispettive comprensioni" (Bonotto, 1999).

Questo processo viene chiamato dalla scuola di pensiero olandese di ‘***matematizzazione orizzontale***’ (si veda Treffers, 1987, ripreso da Freudenthal, cit). Viene così a crearsi un utile *ponte di collegamento* tra contesto scolastico ed extra-scolastico, in cui i bambini possono costantemente mantenere la significatività dei propri ragionamenti ed il controllo delle proprie inferenze (Bonotto, 2007).

Ma un diverso uso di tali artefatti culturali può offrire lo spunto per fare anche della ‘***matematizzazione verticale***’, dai concetti sui concetti.

Questa si manifesta quando si fanno diventare i simboli, i fatti matematici incorporati, oggetti da mettere in relazione, da modificare o manipolare, su cui riflettere, rilevandone proprietà, facendo congetture (Bonotto, 2007).

*‘matematizzazione orizzontale’*

**situazioni del mondo reale** ----→ **concetti matematici**

⇕ *‘matematizzazione verticale’*

**situazioni del mondo reale** ←---- **concetti matematici**

Nella fase in cui gli artefatti culturali vengono spogliati di alcuni dati [come in alcune esperienze con gli scontrini che verranno descritte nel prossimo paragrafo e nella seconda parte del volume] essi diventano ancpra più esplicitamente ***strumenti di mediazione e di integrazione*** tra conoscenze extrascolastiche e scolastiche, tra esperienze interne ed esterne alla scuola e, se opportunamente utilizzati, possono anche creare nuovi obiettivi nella pratica didattica.

In questo nuovo ruolo l'artefatto culturale può infatti servire ad introdurre nuove conoscenze matematiche in un modo particolarmente significativo e motivante, in quanto agganciato alle situazioni della vita di ogni giorno.

Si è  presentato il seguente scontrino:

PROSCIUTTO DI PARMA

| | | |
|---|---|---|
| kg | L./kg | L. |
| 0,210 | 38 900 | ...... |

In questo caso le consegne sono state le seguenti:

1) *Secondo te, il dato mancante sarà un numero maggiore o minore di 38900?*

2) *Senza fare calcoli precisi, sapresti calcolare pressappoco l'importo?*

*3) Ora prova a calcolare l'importo esatto.*

Estratto della discussione:

I: *In base a tutte le operazioni che abbiamo fatto, se io faccio una moltiplicazione tra due numeri il numero che viene fuori è più grande di uno dei due? Pensateci.*

M: *Lei vuole chiedere se moltiplicare vuol dire ottenere numeri più grandi di quelli da cui partiamo, oppure no.*

Elena: *Dipende dai numeri che ci sono nell'operazione.*

I: *Allora moltiplicare non vuol dire esclusivamente…*

Filippo: *ottenere un numero più alto*

Viola: *più grande*

I: *Si ottiene un numero più grande se …*

Viola: *se ci sono i numeri naturali*

I: *Naturali, va bene, ma per quanto riguarda i decimali?*

Viola: *Può essere più piccolo*

I: *Quando è più piccolo?*

Alex: *Quando c'è un numero più piccolo di 1.*

I: *Anche con i numeri decimali si può ottenere un numero maggiore dei fattori…*

Filippo: *Se c'è un numero maggiore di 1 ottengo un risultato più grande.*

# *Esempi di artefatti culturali usati nelle nostre esperienze in classe*


ITALIA
LIDL
Freschezza
che si nota
MCENNEDY
AMERICAN WAY
Lunedì 25 a Mercoledì 27 Febbraio
Fusi di pollo
-1.00 €!
3.79 2.79
Hamburger
di bovino adulto
-20%!
1.49 1.19
Pizza
fresca
-0.50 €!
1.99 1.49
Carpaccio di cavallo
Solo per
pochi giorni
Incredibile
Offerta!
3.99
Mozzarella multipack
-23%!
3.89 2.99
Yogurt intero con zucchero di canna
-25%!
1.59 1.19
n°1
CAMPIONI
DEL RISPARMIO
Lidl è sempre
la scelta vincente.
Ogni giorno è speso bene
www.lidl.it

18.10 SPORTSERA
18.30 TG2
18.50 10 MINUTI
19.00 L'ISOLA DEI FAMOSI
19.45 WARNER SHOW
20.15 CLASSICI DISNEY
20.30 TG2

## 21.00

### E.R.

Attualità. Con Noah Wyle. Kovac, forte dell'esperienza fatta in Africa, torna al County. Morris, intanto, lascia l'ospedale.

22.40 TG2
22.50 L'ISOLA DEI FAMOSI 2
23.35 CONCERTO ANTONACCI
1.15 TG PARLAMENTO
1.25 SORGENTE DI VITA
1.55 METEO2
2.00 APP. AL CINEMA
2.05 MORTE DI UNA STREGA
2.50 TG2 SALUTE
3.05 LEGGENDE D'ITALIA
3.15 LO SGUARDO DENTRO
3.25 CERCANDO CERCANDO
4.00 IL POSTINO SUONA...

20.00 RAI SPORT TRE
20.10 BLOB
20.30 UN POSTO AL SOLE A Elena avrà modo di prendersi una piccola vendetta su Ferri, che avrà invece l'occasione di vedere le cose sotto una luce diversa.

## 21.00

### CHI L'HA VISTO?

Attualità. Federica Sciarelli cerca di fare chiarezza sul caso di Alberto Genta. Al suo posto, infatti, è stato seppellito un altro.

23.05 TG3
23.10 TG REGIONE
23.20 TG3 PRIMO PIANO
23.40 MESTIERE DI VIVERE Campo dei Fiori a Roma: un luogo in cui si incrociano storie, in cui si sfiorano per pochi istanti le esistenze più diverse. Come quella di Gabriella, cronista di eventi mondani, o quelle di Alessandro e Daniele, che lavorano in un'agenzia di pompe funebri.
0.35 TG3

te l'uno, ha come protagonisti sedici concorrenti. Conduce Gerry Scotti.
19.20 GRANDE FRATELLO
19.40 PASSAPAROLA
20.00 TG5
20.30 STRISCIA LA NOTIZIA

## 21.00 FILM

### A BEAUTIFUL MIND

Drammatico (Usa, 2001, 135') con Russel Crowe, Jennifer Connelly, Paul Bettany. Regia di Ron Howard.

23.15 GRANDE FRATELLO
23.30 COSTANZO SHOW
1.00 TG5 NOTTE
1.30 STRISCIA LA NOTIZIA
2.00 GRANDE FRATELLO
2.30 VOLERE O VOLARE
2.45 AMICI
3.30 SHOPPING BY NIGHT Attrezzi per il fitness, coltelli tagliatutto e utensili multiuso sono acquistabili con una telefonata.
4.00 CASA DOLCE CASA
4.35 I VIAGGIATORI

parla agli altri criceti.
17.20 TOPO GIGIO SHOW
17.55 CAMPIONI, IL SOGNO
18.25 MEDIASHOPPING
18.30 STUDIO APERTO
19.00 TUTTO IN FAMIGLIA
19.55 IL GIOCO DEI 9

## 21.05

### MAI DIRE GRANDE FRATELLO

Varietà. La Gialappa's Band commenta con ironia quanto accaduto nella casa del GF.

22.20 LE IENE.IT
23.35 COLORADO CAFE LIVE Dalla Salumeria di Milano, i comici sono protagonisti di serate rigorosamente "live" di comicità. Nel cast figurano, tra gli altri, Enrique Balbontin, Maurizio Battista, Stefano Chiodaroli, i Gemelli Ruggeri, Marco Milano. Conducono Andrea Appi e Rossella Brescia.
1.00 STUDIO SPORT
1.25 MEDIASHOPPING

## PIZZE

| | |
|---|---|
| ***Mare e monti***<br>*Pomodoro, mozzarella, frutti di mare, porcini* | € 9 |
| ***Quattro stagioni***<br>*Pomodoro, mozzarella, prosciutto, funghi, carciofi* | € 7 |
| ***Frutti di mare***<br>*Pomodoro, mozzarella, frutti di mare* | € 9 |
| ***Diavola***<br>*Pomodoro, mozzarella, salame piccante* | € 6 |
| ***Margherita***<br>*Pomodoro, mozzarella* | € 4 |
| ***Funghi porcini***<br>*Pomodoro, mozzarella, funghi porcini* | € 9 |
| ***Prosciutto crudo***<br>*Pomodoro, mozzarella, prosciutto crudo* | € 8 |
| ***Calzone***<br>*Pomodoro, mozzarella, prosciutto* | € 6 |
| ***Wurstel***<br>*Pomodoro, mozzarella, wurstel* | € 5 |
| ***Pazza***<br>*Pomodoro, mozzarella, patate fritte* | € 5 |
| ***Salmone***<br>*Pomodoro, mozzarella, salmone* | € 8 |
| ***Marinara***<br>*Pomodoro, aglio, origano* | € 3 |

*Coperto € 2*

*Supplemento € 1*

## BIBITE

| | |
|---|---|
| Lattine | € 2 |
| Acqua | € 1 |
| Vino | € 3 |
| Birra | € 2 |

# Al Ristorante

RISTORANTE
"QUARTA C"
Via Mazzini, 26
Desenzano del Garda (BS)
18/04/2005

| | | €uro |
|---|---|---|
| 1 | Cheyenne Chicken | 6, 8 0 |
| 1 | Apache | 6, 0 0 |
| 1 | ………………………………………… | |
| 2 | Acqua minerale (0,50) | 2, 4 0 |

……………………………………………

TOTALE……………………...€ 2 0, 5 0

GRAZIE E ARRIVEDERCI

## TAGLIERI

| | |
|---|---|
| **Tagliere Cowboy** Salame, culatello, pancetta (150 gr) | € 6,50 |
| **Tagliere Yankee** Lardo con paprica, sfilacci di cavallo, prosciutto cotto affumicato (150 gr) | € 6,50 |
| **Tagliere Vero Pellico** Gorgonzola dolce, quartirolo, taleggio (150 gr) | € 6,50 |

## HAMBURGER

I piatti sono composti da maxi hamburger da 150 gr. servito con pane, patatine fritte e salsa fatta in casa.

| | |
|---|---|
| **Apache** Hamburger con cipolla, pomodoro fresco e cetriolini | € 6,00 |
| **Navajo** Hamburger con formaggio fuso | € 6,20 |
| **Geronimo** Hamburger con bacon grigliato | € 6,70 |
| **Dakota** Hamburger con bacon grigliato e formaggio fuso | € 7,20 |
| **Nuvola Rossa** Hamburger con cipolla in padella, formaggio fuso e lattuga | € 6,70 |
| **Cavallo Pazzo** Hamburger con julienne di peperoni in padella, formaggio fuso e lattuga | € 6,70 |

## CARNI GRAND CANYON

Le nostre specialità a base di carni rosse.

| | |
|---|---|
| **Squaw Steak** Bistecca di roast beef di prima scelta servita con contorno di verdura fresca | € 9,80 |
| **Cherokee** Tagliata con rucola, grana a scaglie e patate Steak House | € 12,50 |
| **Sioux Beef** Filetto da 180 gr con patate Steak House | € 14,00 |
| **Big Ranch Beef** Filetto da 350 gr | € 24,50 |
| **Buffalo Bill Steak** Costata di carne fresca di manzo selezionata e grigliata al punto giusto | € 4,00 |

## CARNI WHITE MOUNTAIN

Le nostre specialità a base di carni bianche

| | |
|---|---|
| **Cheyenne Chicken** Petto di pollo alla griglia con bacon | € 6,80 |
| **Chicken Wings** Alette di pollo fritte particolarmente speziate | € 6,00 |

## SPECIALITÀ TEX-MEX

| | |
|---|---|
| **Gringos Nachos** Triangolini di mais con salse tipiche messicane (guacamole, cheddar sauce, chipotle) | € 4,60 |
| **Frijoles del Conquistador** Piatto tipico di fagioli con carne di maiale in salsa chili piccante | € 5,90 |
| **Burrito Sierra Nevada** Tortilla di grano con carne di pollo e verdure in padella con contorno di riso e mais | € 6,90 |
| **Taco El Diablo** Un taco farcito con carne di pollo speziato ed uno con carne di maiale in salsa chili piccante | € 6,90 |

## INSALATONE

| | |
|---|---|
| **Insalatona Colorado** Insalata verde, rucola, pomodoro pachino, carote | € 3,50 |
| **Insalatona Montana** Insalata verde, bacon, uovo sodo, pomodoro pachino | € 4,60 |
| **Insalatona Arizona** Insalata verde, rucola, pollo, salsa Caesar | € 5,80 |

## DOLCI

| | |
|---|---|
| **Brownie** Dolce al cioccolato n.1 in America | € 4,00 |
| **Cheesecake** Torta di pasta frolla con formaggio e salsa alla frutta | € 4,00 |
| **Soufflé Due Lune** Soufflé al cioccolato/caffè | € 4,00 |
| **Carrot Cake** Torta di carote | € 3,50 |
| **Gelato Crema/Cioccolato** | € 3,00 |

**MENÙ PICCOLO LUPO:**
Hamburger da 80 gr, patatine fritte con ketchup, Coca Cola piccola
€ 5,30

## DRINKS

### ACQUA & SUCCHI

Acqua Minerale 0,50 PET ……….. € 1,20
Acqua Minerale 0,75……………… € 2,10
Succhi di frutta…………………… € 2,10

### BIBITE SPINA

Coca/Fanta/Tonica/Lemon
0,30….. € 1,80
0,50….. € 2,90

*Qual è il dato mancante?*
*Se decidono di dividere alla romana quanto pagherà ognuno?*

20,50 : 3 = 6,83333
25
10
10
10
10
10

*I. Secondo voi come ci dobbiamo comportare con questi numeri periodici... Per esempio nel nostro caso?*

*P 745. Io ho arrotondato e così ognuno deve pagare € 6,83...*

*P 756. Ma se ognuno paga € 6,83 viene in tutto € 20,49 e il conto é € 20, 50... Quindi secondo me c'è qualcuno che deve mettere un centesimo in più.*

*P 757. Secondo me non è giusto... devono mettere tutti gli stessi soldi e quindi mettono tutti € 6,84 così viene in totale € 20,52. Ci sono due centesimi in più e il resto di solito al ristorante si lascia di mancia.*

*P 750. Anche per me è meglio fare così e i due centesimi in più se non si vogliono lasciare di mancia si possono mettere via per la prossima cena tutti insieme.*

## Esperienza: “*Bratislava Meeting*”

L’esperienza si è svolta nella scuola primaria (classe V) e in quella secondaria di I grado (classe I) “F.Malfer” di Garda.

L'attività è nata all'interno di un progetto europeo di matematica che ha visto collaborare docenti di 11 Paesi.

L’attività proposta è stata pianificare un viaggio nei dettagli con l’ausilio di internet (per una descrizione si veda Bonotto & Baroni, 2011).

Il compito è stato ideato sotto forma di racconto/fumetto in lingua inglese ed ha come protagonista un'insegnante che riceve un invito per un meeting e deve quindi pianificare il viaggio.

La metodologia utilizzata è stata il lavoro in coppia seguito da discussione collettiva per la socializzazione delle soluzioni e il confronto tra le strategie usate.

La durata dell’esperienza è stata di due ore circa.

Il ruolo dell’insegnante è stato di carattere tecnico-informatico e di coordinatore degli interventi.

Il computer portatile è stato introdotto come un particolare artefatto.

Una delle fasi del compito è consistita nel cercare la soluzione di viaggio più economica per raggiungere Bratislava (consultando dei siti suggeriti dall'insegnante). L'attività è solo apparentemente facile in quanto la località di Garda è molto vicina all'aeroporto di Verona ma anche all'aeroporto di Venezia, e i tre aeroporti di Milano sono comodamente raggiungibili.

Questa condizione ha creato una maggiore difficoltà nel calcolo della convenienza in quanto gli alunni si sono trovati a dover calcolare una serie di combinazioni possibili.

# ATTIVAZIONI DI CONSIDERAZIONI DI TIPO REALISTICO

Stefano: *“Il volo che parte dall’aeroporto di Verona andata e ritorno costa tanto: € 395, 48. Da Milano Malpensa, invece, costa 335,98 € quindi scelgo il secondo”.*

Insegnante: *“La pensate tutti così?”*

Luca: *“Veramente quando parto con mia mamma e mio papà cerchiamo di non partire mai da Milano perché è lontano e se ci vai in auto il parcheggio costa un sacco, altrimenti devi prendere il treno e poi anche un pullman”.*

Federica: *“E poi da Milano non è diretto ma bisogna scendere a Praga mentre da Verona è un volo solo fino a Bratislava”.*

Insegnante: *“Luca e Federica che viaggiano molto con i propri genitori ci hanno dato un ottimo suggerimento. Se decidiamo di acquistare il biglietto da Milano dobbiamo anche calcolare la spesa per raggiungere Malpensa. Come dice Luca che se ne intende l’aeroporto di Milano Malpensa si raggiunge prendendo un treno da Peschiera fino a Milano e poi un autobus dalla Stazione Centrale di Milano all’aeroporto. Pensate che sia ancora conveniente?”*.

Gaja: *“Io ho appena controllato sul sito che ci hai detto tu e il biglietto da Peschiera del Garda a Milano costa € 7,60”.*

Mirko: *“In verità 2 x 7,60 € perché si deve prendere anche al ritorno… guarda che la maestra non resta là a Bratislava ma deve anche tornare a scuola”.*

Insegnante: *“Molto bene, vedo che siete super esperti di viaggi! E il pullman navetta fino a Malpensa quanto costa?”*

Mirko: *“Costa € 8,00 sempre per due”*

Insegnante: *“Cosa suggerite? Qual è il più conveniente?”*

Costanza: *“Risulta da Milano 367,18 €… è un po’ di meno di Verona che costa 395,48 €. Quale vuoi che ti prenotiamo maestra?”*

Insegnante: *“Cosa mi suggerite?”*

Luca: *“Io sono andato tante volte a prendere l’aereo a Malpensa e non mi piace perché è lontano e in treno ci vuole tantissimo tempo”.*

Insegnante: *“Hai ragione, anche se il volo da Verona è leggermente più caro, credo che sia meglio partire da lì perché l’aeroporto è più vicino e il volo è diretto”.*

# CARATTERISTICHE DEGLI ARTEFATTI USATI

1.. Essi fanno parte della realtà esperienziale del bambino, consentendogli di riferirsi a delle situazioni concrete e permettendogli così di sviluppare dei ragionamenti significativi e nello stesso tempo di monitorarli.

2. I dati contenuti sono reali e quindi i risultati dei calcoli spesso devono essere **interpretati e/o arrotondati** proprio come avviene nei contesti extrascolastici.

3. I dati, non scelti ad hoc dagli autori (come avviene nei testi scolastici), possono stimolare nei bambini curiosità di tipo "anticipatorio", ed offrire così la possibilità di affrontare argomenti non previsti [favorendo un "***apprendimento di tipo anticipatorio*****" ("*****anticipatory learning*****") o per "*****organizzazione anticipata*****"**, come descritto in Freudenthal, 1994], e di fare collegamenti significativi.

# CARATTERISTICHE DEGLI ARTEFATTI USATI

4. Essi appartengono alla realtà quotidiana degli alunni e quindi possono rivestire un doppio ruolo (Bonotto, 2007): favorire la

“**matematizzazione del quotidiano**“

(in quanto si portano all’interno del contesto scolastico oggetti, o loro riproduzioni, appartenenti alla realtà quotidiana dei bambini) e la

“**quotidianizzazione della matematica**”

(in quanto si possono stimolare i bambini a osservare l’enorme quantità di matematica presente nei contesti extrascolastici).

5. La caratteristica non artificiale e complessa di questi materiali e la loro natura extrascolastica possono favorire la connessione con le altre discipline (ad es. storia, geografia, scienze, italiano) e quindi **attività interdisciplinari**.

# CARATTERISTICHE DEGLI ARTEFATTI USATI

6. La familiarità con questi materiali può aiutare a **dissolvere le paure comuni e le ansie** che solitamente accompagnano l'apprendimento della matematica.

**"*Questo non è un problema. I problemi sono pieni di parole… e poi quelli non riesco a farli perché non capisco bene. Questi sì perché tutti sanno leggere il menù del ristorante e poi il mio papà ha un ristorante!*".**

**"*Nello scontrino povero di parole ma ricco di significati impliciti, si ribalta la situazione rispetto all'usuale problema di compra-vendita, che risulta spesso ricco di parole, ma povero di riferimenti significativi*"** (Bonotto, 1999).

7. La significatività e l'originalità di questi artefatti può favorire **l'interesse e la motivazione**.

# CARATTERISTICHE DEGLI ARTEFATTI USATI

Essi, infine, si differenziano notevolmente dal materiale strutturato utilizzato comunemente nella pratica didattica: quest’ultimo è uno strumento costruito artificialmente, legato all’ambito scolastico, fortemente semplificato e decontestualizzato.

*“I blocchi logici sono un esempio tipico di successi, che possono essere mietuti con materiale fortemente strutturato; successi ben miseri, ottenuti grazie all’amore della facilità. Il materiale ricco, aperto alla strutturazione, che offre più numerose opportunità didattiche, richiede di più e quindi è meno facile da sfruttare”* (Freudenthal, cit).

Invitando poi gli allievi

- **a recuperare artefatti culturali presenti nella loro vita di ogni giorno,**
- **a leggervi la parte di matematica incorporata,**
- **a riconoscervi alcuni fatti matematici, più o meno nascosti,**
- **ad interpretarli,**
- **a vederne analogie e differenze**

[ad esempio modi diversi di rappresentare i numeri],

- **a porsi dei problemi**

[trovare rapporti tra i dati, anticipare proprietà, e così via],

noi possiamo far riconoscere loro un'ampia varietà di situazioni esterne alla scuola come *situazioni matematizzabili*.

In questo modo si possono moltiplicare quanto si vuole le occasioni di incontro tra studenti e matematica, ora relegate alle sole aule e ore scolastiche, dando avvio ad una vera attività di matematizzazione del reale, ed alla formazione di un diverso atteggiamento nei confronti di questa disciplina.

Non è comunque il materiale in se’ ed in isolamento che risulta di supporto per l’insegnante, ma è piuttosto l’uso dell’artefatto ed i significati che da esso si sviluppano come risultato di attività.

***“Gli artefatti assumono un significato matematico solo nell’attività, in base a come gli individui li organizzano come mezzi per raggiungere precisi obiettivi matematici”* (Saxe, 2002).**

**Riveste quindi un ruolo importante anche l’utilizzo di una varietà di metodologie didattiche tra di loro complementari, integrate ed interattive** (verbalizzazioni scritte, lavori in coppia o di gruppo, discussioni collettive, interventi dell'insegnante in fase di istituzionalizzazione del sapere ),

**e lo stabilire una nuova cultura in classe**, cercando di cambiare anche le convinzioni, credenze ed atteggiamenti, sia degli studenti sia degli insegnanti, nei confronti della matematica, anche attraverso **nuove norme socio-matematiche** (Yackel & Cobb, 1996).

# NORME SOCIO-MATEMATICHE

L'insegnante

- **dà un senso al problema**
cercando di fare avanti-indietro tra l'interpretazione del problema ed il controllo di procedure e risultati;

- **incoraggia gli studenti ad usare metodi propri**
esplorandone l'utilità e l'adeguatezza riguardo al problema;

- **stimola gli studenti a riflettere sulle proprie convinzioni, misconcetti e strategie**

- **sottolinea l'esistenza di soluzioni o strategie diverse**

- **incoraggia gli studenti a confrontare strategie diverse.**

# Sul ruolo della verbalizzazione

I testi scritti dai bambini, così come gli altri testi, possiedono, come sostiene il semiologo russo Yuri Lotman, un "**dualismo funzionale**" rappresentato da una funzione "**univoca**" e da una funzione "**dialogica**". La funzione del testo scritto da un alunno è importante in quanto il testo trasmette significati ad altri, siano essi insegnanti o coetanei (funzione univoca) ma costituisce anche materiale di riflessione diventando così "**strumento di pensiero**" (funzione dialogica) in grado di generare nuovi significati.

La scrittura infatti
"*rende la lingua capace di rappresentarsi simbolicamente e così permette che il pensiero diventi consapevole, un fatto di enorme importanza per l'educazione matematica. In quest'ottica il vero processo di educazione (ex-ducere) comincia quando il bambino riesce a trattare il proprio punto di vista come l'oggetto di un discorso alimentato dal dialogo che intraprende con il proprio testo ... e i testi altrui*", Dodman, 1995.

L'influenza dell'opera di Vygotsky fa sì che oggigiorno

*"le conoscenze vengono percepite come qualcosa che si costruisce e si modifica attraverso l'interazione, e la lingua è concepita in primo luogo non come veicolo per l'espressione del pensiero ma come* ***veicolo per lo sviluppo del pensiero****. ... Per l'insegnante, si tratta di agire in modo da far sì che lo studente possa appropriarsi delle forme dialogiche della lettura e della scrittura ed anche della conversazione in modo che diventino* ***una risorsa per il pensiero nel dialogo interno del "parlato intrapersonale"****. ... L'azione didattica deve rendere le risorse culturali della matematica accessibili e disponibili tramite la mediazione del passaggio dalla funzione dialogica del testo alla funzione univoca. Certamente il processo non è semplice o lineare. È un processo a doppio senso e non a senso unico..."*, Dodman, 1995.

È quindi importante invitare gli alunni ad esplicitare per iscritto i loro ragionamenti, per abituarli a scrivere di "fatti matematici" e a riflettere su di essi e sulle proprie inferenze.

# CONCLUSIONI

Dobbiamo riconoscere che l'utilizzo degli artefatti a scuola richiede un cambiamento di atteggiamento da parte degli insegnanti: essi devono

- cercare di valorizzare le esperienze e le conoscenze maturate fuori dalla scuola;
- vedere la matematica incorporata nel mondo reale come punto di partenza per attività da fare in classe, predisponendo dei "contesti ricchi" (Freudenthal);
- conoscere le idee e pratiche presenti nelle comunità culturali, etniche, linguistiche degli allievi;
- instaurare in classe un clima che favorisca la socializzazione del sapere piuttosto che la trasmissione esclusiva tra docente e insegnante;
- favorire attività alternative ma di supporto al *problem solving* come per esempio il *problem posing*.

Si può impostare tutto l'insegnamento della matematica nel modo qui suggerito?

Probabilmente NO

Ci rendiamo infatti conto che nella pratica didattica queste esperienze devono essere affiancate da attività più usuali, di rinforzo, di calcolo, secondo prassi ormai consolidate.

"*Una antinomia molto di moda nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica è quella che si verifica quando si mette da una parte di un profondo abisso*

*delle nobili idee come: intuizione, comprensione, pensiero,*

*e dall'altra parte*

*delle cose basilari come: esercizio, routine, abilità, memorizzazione, algoritmi ...*

*suggerendo che l'apprendimento per intuizioni è una nobile teoria, mentre la pratica è imparare con l'esercizio e la memorizzazione. Tuttavia le cose non sono così semplici e non lo sono mai state ....*

*anzitutto perché la questione non è di scegliere una delle sponde dell'abisso, ma di gettare un ponte ...*", Freudenthal, 1994.

Riteniamo però che alcune esperienze di questo tipo, per il loro valore paradigmatico, oltre a servire da motivante trampolino di lancio per l'apprendimento di nuove conoscenze, almeno ad un primo stadio, possano contribuire a cambiare l'atteggiamento dello studente nei confronti della matematica.

# Bibliografia


Basso M, Bonotto C. (1996). Un’esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali. *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 19A, n.5, 423-449.

Bonotto C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. *L’ins. della matematica e delle scienze integrate*, 15A, n.5, 415-448.

Bonotto C. (1993). Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimali e frazioni. *L’ins. della Matematica e delle Scienze Integrate*,16A, n.1, 9-45.

Bonotto C. (1995). Sull’integrazione delle strutture numeriche nella scuola dell’obbligo. *L’Ins. della Matematica e delle Scienze Integrate*, 18A, n.4, 311-338.

Bonotto C. (1996). Sul modo di affrontare i numeri decimali nella scuola dell’obbligo. *L'ins. della matematica e delle scienze integrate*, 19A, n.2, 107-132.

# Bibliografia


Bonotto C. (1999). Sull'uso di artefatti culturali nell'insegnamento/apprendimento della matematica. *L'Educazione Matematica,* Anno XX, Serie VI, Vol. 1(2), 62-95.

Bonotto C. (2007). *Quotidianizzare la Matematica*, La Biblioteca Pensa Multimedia, Lecce, 2007.

Bonotto C., Baroni M. (2011). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività?

I Parte, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 34(A), n.1, pp. 9-40,

II Parte, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 34(A), n.3, pp. 125-160.

Bonotto C., Basso M., Baccarin F. & Feltresi M. (2010). Il calendario come veicolo per la modellizzazione matematica. *L'Ins. della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 33(A), n.1, 9-45

# Bibliografia


Bonotto C., Basso M., Baccarin F. & Feltresi M. (2013). Sul senso delle operazioni aritmetiche e degli algoritmi. Prima parte. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 36(A), n.4, 325-356.

Bonotto C., Basso M., Baccarin F. & Feltresi M. (2014). Sul senso delle operazioni aritmetiche e degli algoritmi. Seconda parte. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 37(A), n.3, pp. 226-256.

Bonotto, C. & Dal Santo L. (2015). Problem posing, problem solving e creatività in matematica: come promuovere e valutare questi aspetti nella scuola primaria. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 38(A), n.2, pp. 107-150.

Bonotto C., & Wilczewski E. (2007). I problemi di matematica nella scuola primaria: sull'attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico. In Bonotto C. *Quotidianizzare la Matematica*, Lecce: La Biblioteca Pensa Multimedia, 101-134.

# Bibliografia


Brousseau G. (1984). *The Crucial Role of the Didactical Contract in the Analysis and Construction of Situations in Teaching and Learning mathematics*. In H. Steiner (ed.) *Theory of Mathematics Education* (pp. 110-119), Bielefeld: Institut fur Didaktik der Mathematik der Universitat Bielefeld:.

D'Ambrosio U. (1995). Etnomatematica: teoria e pratica pedagogica', *L'Educazione Matematica*, Anno XVI, Serie IV, 2 (3), 147-159.

Freudenthal H. (1991). *Revisiting mathematics education*. *China Lectures*. Dordrecht: Kluwer [trad. ital. *Ripensando l'educazione matematica*. *Lezioni tenute in Cina* (a cura di C. F. Manara), Brescia: La Scuola, 1994].

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*. *An International Journal*, 1(2), 155-177.

Pontecorvo C. (1997). Apprendere nei contesti. *Studi e Documenti degli Annali della P.I.*, 78, 384-396.

# Bibliografia

Resnick L.B. (1987). Learning in school and out, *Educational Researcher*. 16(9), 13-20, tradotto in Pontecorvo, Ajello, Zucchermaglio (a cura di) *I contesti sociali dell'apprendimento* (pp. 61-83), Led, Milano, 1995.

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. and Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), 8-27.

Resnick L.B. (1995). Razionalismo situato. In O. Liverta Sempio & A. Marchetti (eds) *Il pensiero dell'altro* (pp. 73-95), Milano: Raffaello Cortina.

Saxe, B. G. (2002). Children's developing mathematics in collective practices: A framework for analysis. *Journal of the Learning Sciences*, 11 (2/3), 275-300.

Van Lieshout E. C. D. M, Verdwaald A. e Van Herk J. (1997).*Suppression of real-word knowdledge and demand characteristics*, Paper presenteted at the Seventh European Conference on learning and instruction, Atene, Grecia.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458–477.